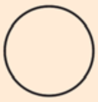
अध्यायः 3

चतुर्भुजानां बोधनम्

3.1 भूमिका

भवन्तः जानन्ति एव यत् कर्गदं समतलस्य एकं प्रतिरूपम् अस्ति। यदा भवन्तः कागदात् अङ्कनीम् अपसारणं विनैव परस्परं संयोजयन्ति (केवलं बिन्दुं हित्वा आकृतेः कमपि भागं अनुरेखितं विना) तदा भवन्तः एकं समतलीय वक्रं प्राप्नुवन्ति। गतकक्ष्यायां दृष्टं विविधप्रकारकं गतकक्ष्यायां वक्रं स्मर्तुं प्रयासं कुर्वन्तु।

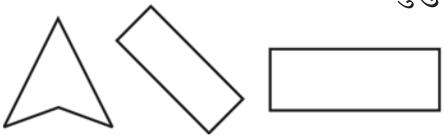
निम्न-आकृतीनां सुमेलनं कुर्वन्तु। (ध्यातव्यं एकस्याः आकृतेः एकाधिक-आकृतिभिः सह सुमेलनं भवितुम् अर्हति।)

आकृतिः	उदाहरणम्
(1)	(a) सरलबन्धः वक्रः अस्ति।
(2)	(b) वक्रबन्धः यः सरलः नास्ति।
(3) 	(c) सरलः वक्रः यः बन्धः नास्ति।
(4)	(d) सरलः वक्रः नास्ति।

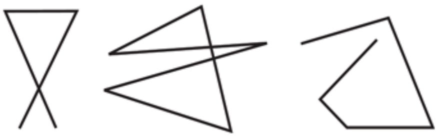
स्वकीय-मित्रैः सह अस्य मेलनस्य तुलनां कुर्वन्तु किं ते सहमताः सन्ति ?

3.1 बहुभुजः

केवलं रेखाखण्डेन निर्मितः सरलबन्धः वक्रः **बहुभुजः** इति कथ्यते।



वक्राः ये बहुभुजाः सन्ति।

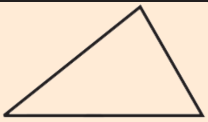
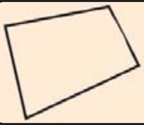
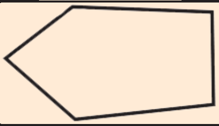
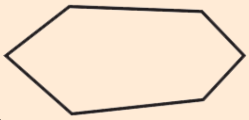
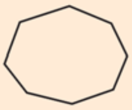
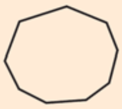
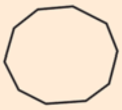


वक्राः ये बहुभुजाः न सन्ति।

केषाञ्चन बहुभुजानां उदाहरणं दातुं प्रयासं कुर्वन्तु तथा कानिचन एतादृशानि उदाहरणानि प्रदर्शयन्तु ये बहुभुजाः न भवेयुः। एकस्य बहुभुजस्य सामान्य-आकृतिं एवमेव आकृतिं लिखन्तु तथा तस्य भुजं शीर्षञ्च जानन्तु।

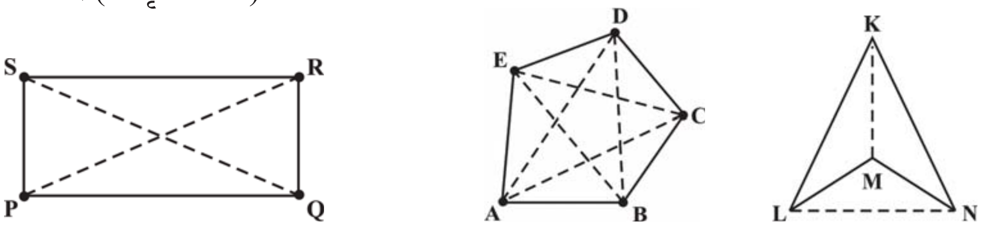
3.2.1 बहुभुजानां वर्गीकरणम्

वयं बहुभुजानां वर्गीकरणं तस्य भुजानां (अथवा शीर्षाणां) अनुसारेण कुर्मः।

भुजानाम् अथवा शीर्षाणां संख्या	वर्गीकरणम्	आकृतेः उदाहरणम्
3	त्रिभुजः	
4	चतुर्भुजः	
5	पंचर्भुजः	
6	षड्भुजः	
7	सप्तभुजः	
8	अष्टभुजः	
9	नवभुजः	
10	दशभुजः	
⋮	⋮	⋮
n	n-भुजः	

3.2.2 विकर्णः

कस्यापि बहुभुजस्य विकर्णः तस्य के कयोश्चित् द्वयोः राश्योः (आसन्नशीर्षं परित्यज्य) योजनेन प्राप्तः रेखाखण्डः भवति। (आकृतिः 3.1)



आकृतिः 3.1

किं भवन्तः ऊपरि दत्त-आकृतिषु प्रत्येकं विकर्णस्य नाम दातुं शक्नुवन्ति ? (आकृतिः 3.1)

किं एकं $\overline{PQ}$ विकर्णम् अस्ति ? $\overline{LN}$ विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

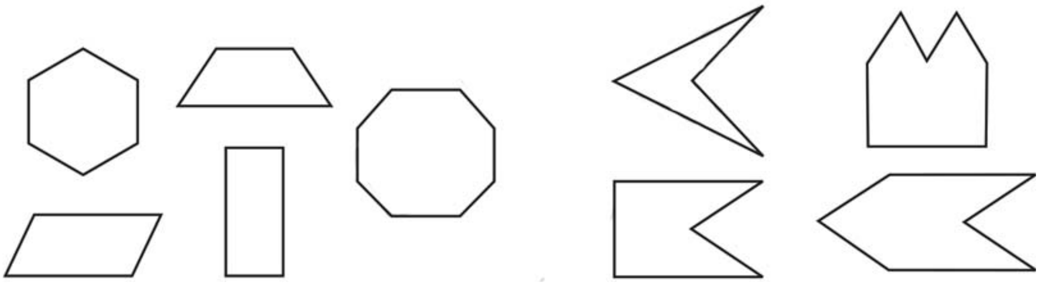
एकस्मिन् बन्धवक्रे अभ्यन्तरस्य बहिर्भागस्य च कः अर्थः अस्ति एतत् भवन्तः सम्यक् जानन्ति (आकृतिः 3.2)।

अभ्यन्तरः **आकृतिः 3.2** **बहिर्भागः**

अभ्यन्तरस्य एका परिसीमा भवति। किं बहिर्भागस्य परिसीमा भवति ? स्व मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु।

3.2.3 उत्तलः अवतलश्च बहुभुजः

अत्र केचन उत्तल बहुभुजाः केचन च अवतल-बहुभुजाः दत्ताः सन्ति। (आकृतिः 3.3)

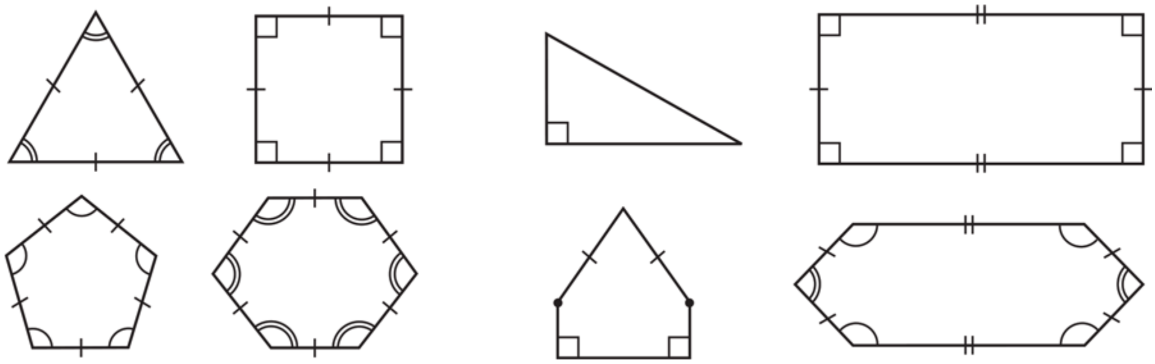


आकृतिः 3.3

किं भवन्तः ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति यत् ईदृशाः बहुभुजाः परस्परं भिन्नाः कथं सन्ति ? ये बहुभुजाः उत्तलाः सन्ति तस्य विकर्णस्य कश्चिदपि भागः बहिर्भागे न भवति। किम् एषः अवतलः बहुभुजानां कृते अपि सत्यम् अस्ति ? प्रदत्त-आकृतीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु। तत् पश्चात् स्व शब्देन उत्तल-बहुभुजम् अवतल-बहुभुजञ्च ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु। प्रत्येक-प्रकारकम् आकृतिद्वयं निर्मापयन्तु। अस्यां कक्ष्यायां वयं केवलम् उत्तल-बहुभुजानां विषये अध्ययनं करिष्यामः।

3.2.4 समः विषमश्च बहुभुजः

एकः समबहुभुजः, समभुजः समकोणिकश्च भवति। उदाहरणार्थम् एकस्मिन् वर्गे भुजः कोणश्च समान-परिमापे भवति। अत एव एषः एकः सम-बहुभुजः अस्ति। एकः आयतः समकोणिकः तु भवति परन्तु समभुजः न भवति। किम् एकः आयतः एकः सम-बहुभुजः अस्ति ? किम् एकः समबाहु-त्रिभुजः एकः सम-बहुभुजः अस्ति ? कथम् ?



सम-बहुभुजः   विषम-बहुभुजः

[सङ्केतः अथवा एतस्य उपयोगः समानं दीर्घ-रेखाखण्डान् दर्शयति ।]

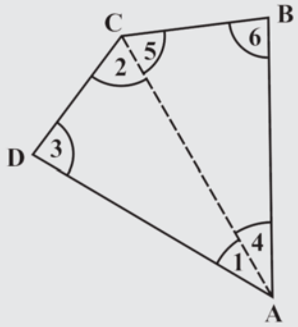
गतकक्ष्यायां किं भवन्तः एतादृश-चतुर्भुज-विषये पठितवन्तः यः समभुजः तु स्यात् परन्तु समकोणिकः न भवेत् ? गतकक्ष्यायाः दृष्टानाम् आकृतीनां स्मरणं कुर्वन्तु यथा - आयतः, वर्गः, समचतुर्भुजः इत्यादि। किं कश्चित् एतादृशः त्रिभुजः अस्ति यः समभुजः तु स्यात् परन्तु समकोणिकः न ?

3.2.5 कोण-योगः गुणधर्मः

किं भवन्तः एकस्य त्रिभुजस्य कोणयोगयुक्तं गुणधर्मं स्मरन्ति ? एकस्य त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां मापस्य योगः 180° अस्ति । वयमिदं तथ्यं बोधयितुं यस्य विधेः उपयोगं कृतवन्तः तं विधिं स्मरन्तु । इदानीं वयम् एताम् अवधारणाम् एकस्य चतुर्भुजस्य कृते प्रयोगं कुर्मः ।

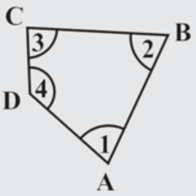
एतत् कुर्वन्तु

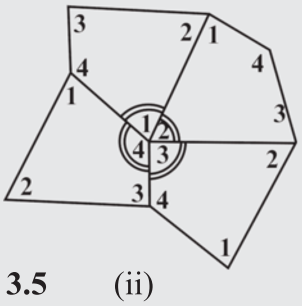
1. कञ्चित् एकं चतुर्भुजं, स्वीकुर्वन्तु ABCD (आकृतिः 3.4)। एकं विकर्णं संलेख्य एतत् त्रिभुजद्वये विभजन्तु। भवन्तः षड्कोणं 1,2,3,4,5 तथा 6 इति प्राप्स्यन्ति। त्रिभुजस्य कोणयोगयुक्तस्य गुणधर्मस्य उपयोगं कुर्वन्तु तथा तर्कयन्तु यत् कथं ∠A∠B ∠C तथा∠D इत्येषाम् मापस्य योगफलं 180°+ 180°=360° इति भवति।



आकृतिः 3.4

2. कश्चित् चतुर्भुजः ABCD इत्यस्य चत्वारि स्थूल-पत्रं सर्वाङ्गसम-प्रतिलिपिं गृह्णन्तु यस्य कोणं दर्शितम् अस्ति (आकृतिः 3.5(i) एतां प्रतिलिपिम् एवंरीत्या व्यवस्थितं कुर्वन्तु यस्मात्





एवं कर्तुं भवन्तः सम्यक्तया कोणं सम्मेल्य तं परिवर्तितुं शक्नुवन्ति येन ते कोणाः सम्यक्तया स्थिताः भवेयुः ।

(i) **आकृतिः 3.5** (ii)

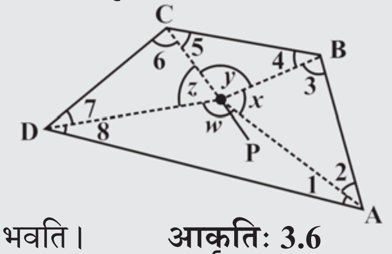
$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ एकस्मिन्नेव बिन्दौ मिलेत् यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति (आकृतिः 3.5 (ii) ।

भवन्तः $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, तथा $\angle 4$ एतेषां योगफलविषये किं कथयितुं शक्नुवन्ति ?

[टिप्पणी - वयं कोणान् $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ इत्यादिना तथा तस्य मापं $m\angle 1$, $m\angle 2$, $m\angle 3$ इत्यादिना दर्शयामः]

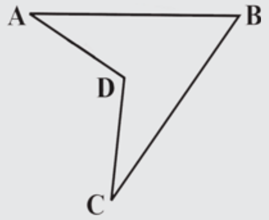
एकस्य चतुर्भुजस्य चतुर्णां कोणानां मापस्य योगफलं .... भवति ।

भवन्तः एतं परिणामं अन्यरीत्या अपि प्राप्तुं शक्नुवन्ति ।



आकृतिः 3.6

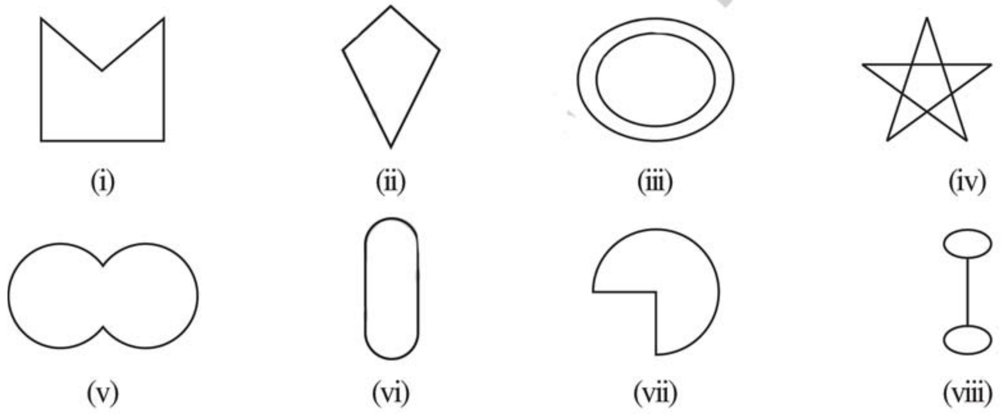
3. ABCD पुनः विचारं कुर्वन्तु (आकृतिः 3.6) । स्वीकुर्वन्तु अभ्यन्तरे कश्चित् बिन्दुः P इति स्थितः वर्तते । P इति शीर्षेण A, B, C तथा D इत्येतान् शीर्षान् संयोजयन्तु । आकृतौ Δ PAB इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु । वयं पश्यामः यत् $x= 180^\circ - m\angle 2 - m\angle 3$ एवमेव Δ PBC इत्यतः $y= 180^\circ - m\angle 4 - m\angle 5$, Δ PCD इत्यतः $z= 180^\circ - m\angle 6 - m\angle 7$ तथा Δ PDA, $w= 180^\circ - m\angle 8 - m\angle 1$ अस्य उपयोगं कृत्वा सम्पूर्णं मापनं $m\angle 1 + m\angle 2 + \cdots + m\angle 8$ जानन्तु । किम् एतत् भवतः परिणामं प्राप्तुं साहाय्यं करोति ? स्मरन्तु $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w = 180^\circ$ अस्ति ।
4. एते सर्वे चतुर्भुजाः उत्तल-चतुर्भुजाः आसन् यदि उत्तलाः न भवन्ति चेत् किं भवेत् ? ABCD विचारं कुर्वन्तु । एतं त्रिभुजद्वये विभज्य अन्तः कोणानां योगफलं जानन्तु ? (आकृतिः 3.7)



आकृतिः 3.7

प्रश्नावली 3.1

1. अत्रकाश्चनआकृतयः प्रदत्ताः सन्ति ।



प्रत्येकस्य वर्गीकरणं निम्नलिखिताधारे कुर्वन्तु ।

(a) साधारणवक्रः (b) साधारणबन्धवक्रः (c) बहुभुजः

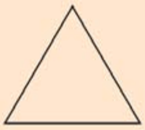
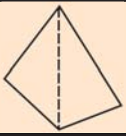
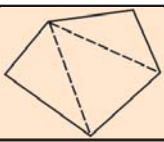
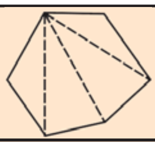
(d) उत्तलबहुभुजः (e) अवतलबहुभुजः

2. निम्नलिखिते प्रत्येकस्मिन् कति विकर्णाः सन्ति ?

(a) एकः उत्तलः चतुर्भुजः (b) एकः समषड्भुजः (c) एकः त्रिभुजः

3. उत्तल-चतुर्भुजस्य कोण-मापानां योगफलं किम् अस्ति ? यदि चतुर्भुजः उत्तलः न भविष्यति तदा किं एतस्य गुणस्य प्रवृत्तिः भविष्यति ? (एकं चतुर्भुजं निर्मान्तु । यः उत्तलः न स्यात् तथा अस्य प्रयासं कुर्वन्तु ।)

4. तालिकायाः परीक्षणं कुर्वन्तु। (प्रत्येक-आकृतिं त्रिभुजेषु विभजितम् अस्ति तथा कोणानां योगफलं ज्ञातम् अस्ति।)

आकृतिः				
भुजः	3	4	5	6
कोणानां योगफलम्	180°	$2\times180^\circ$ $= (4-2)\times180^\circ$	$3\times180^\circ$ $= (5-2)\times180^\circ$	$4\times180^\circ$ $= (6-2)\times180^\circ$

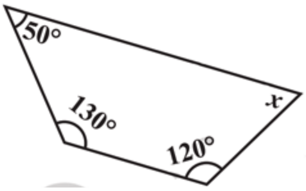
एकस्य बहुभुजस्य कोणयोगानां विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति येषां भुजानां संख्या निम्नलिखिता भवेत् ?

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) n

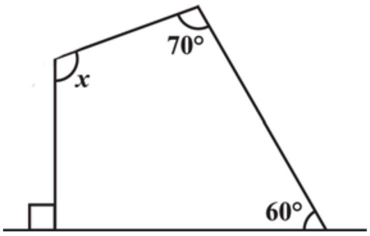
5. समबहुभुजः कः अस्ति ? एकस्य समबहुभुजस्य नाम ज्ञापयन्तु यस्मिन् -

(i) 3 भुजाः (ii) 4 भुजाः (iii) 6 भुजाः भवेयुः

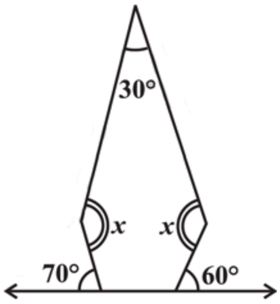
6. निम्नलिखित-आकृतिषु x (कोणस्य मापं) जानन्तु ?



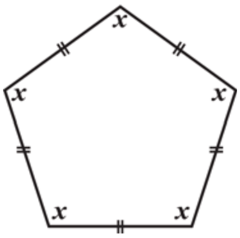
(a)



(b)

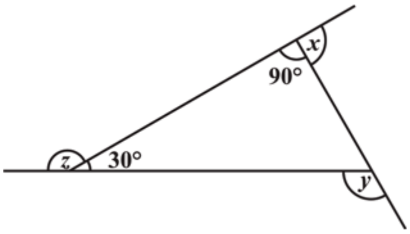


(c)

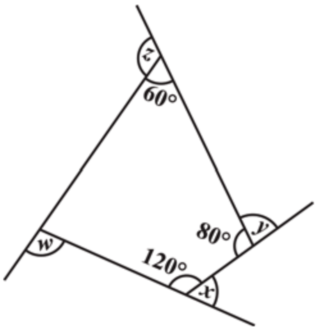


(d)

7.



(a) x+y+z जानन्तु ?



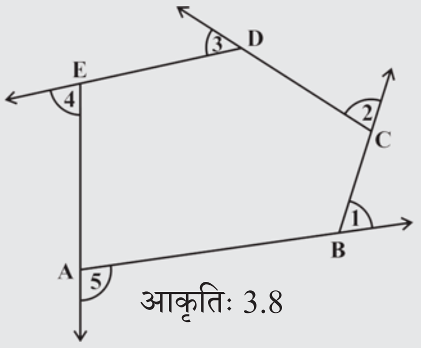
(b) x+y+z+w जानन्तु ?

3.3 एकस्य बहुभुजस्य बाह्यकोणमापानां योग

बहुषु अवसरेषु बाह्यकोणानां ज्ञानम् अन्तः कोणस्य भुजस्य च प्रकृतिं प्रकाशयति।

एतत् कुर्वन्तु

एकेन सुधाखण्डेन भूमौ एकं बहुभुजं। (आकृतौ एकः पञ्चभुजः ABCDE प्रदर्शितम् अस्ति) (आकृतिः 3.8)। वयं सर्वेषां कोणमापानां योगं ज्ञातुम् इच्छामि अर्थात् $m\angle1+m\angle2+m\angle3+m\angle4+m\angle5$ अस्ति। अतः आरम्भं कुर्वन्तु तथा एकं AB इत्यस्य अनुपालनं कुर्वन्तु।B इति बिन्दुं प्राप्य $m\angle1$ इत्यस्मिन् भवतः कृते भ्रमणस्य आवश्यकता भविष्यति यस्मात् भवन्तःBC इत्यस्य अनुदेशानुसारं चलितुं शक्नुयुः। C इत्यस्मिन् गमनानन्तरं CD इत्यस्य अनुदेशे चलितुं $m\angle2$ बिन्दुं प्राप्य भवतः कृते भ्रमणस्य आवश्यकता भविष्यति भवन्तःएवमेव चलनारम्भं कुर्युः यावत् भवन्तः A प्राप्नुवन्ति। वास्तविकरूपे एवं रीत्या भवन्तः एकं चक्रं भ्रमितवन्तः। अतएव $m\angle1+m\angle2+m\angle3+m\angle4+m\angle5=360^\circ$ अस्ति। एकस्य बहुभुजस्य यावन्तः भुजाः स्युः तेषां सर्वेषां कृते एतत् सत्यम् अस्ति।



आकृतिः 3.8

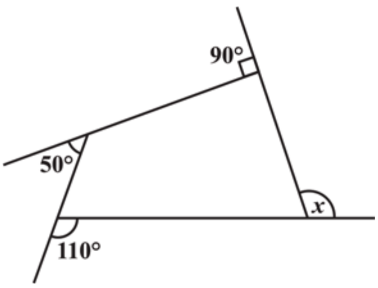
अतः कस्यापि बहुभुजस्य बाह्यकोणमापानां योगः 360° भवति।

उदाहरणम् - 1 आकृतिः 3.9 इत्यस्मिन् x इत्यस्य जानन्तु।

समाधानम् - $x+90^\circ + 50^\circ + 110^\circ = 360^\circ$ (कथम् ?)

$x+250^\circ=360^\circ$

$x=110^\circ$



प्रयासं करोतु

एकं षड्भुजं गृह्णन्तु (आकृतिः 3.10)।

(i) बाह्यकोणाः x, y, z, p, q तथा r एतेषां मापानां योगः कः ?

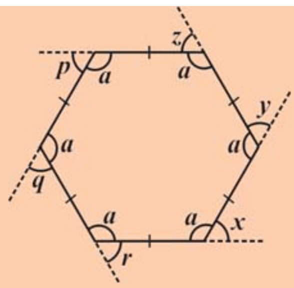
(ii) किं x = y = z = p = q = r अस्ति ? कथम् ?

(iii) प्रत्येकस्य मापनं किम् ?

(i) बाह्यकोणः (ii) अन्तः कोणः

(iv) एतं क्रियाकलापं निम्नलिखितस्य कृते अभ्यासं कुर्वन्तु।

(i) एकः सम-अष्टभुजः (ii) एकः समः 20 भुजः



आकृतिः 3.10

उदाहरणम् - 2 एकस्य समबहुभुजस्य भुजानां संख्यां जानन्तु येषां प्रत्येकं बाह्य कोणस्य मापनं 45° अस्ति।

समाधानम् - सर्वेषां बाह्यकोणानां सम्पूर्णं मापनं = 360°

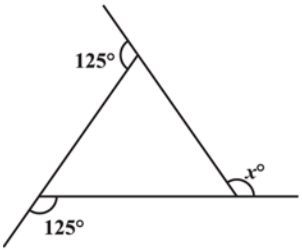
प्रत्येकं बाह्य कोणस्य मापनं = 45°

अतः बाह्यकोणानां संख्या $= \frac{360}{45} = 8$

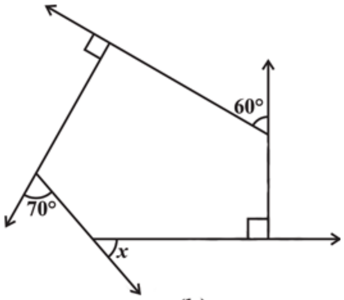
अतः बहुभुजस्य 8 भुजाः सन्ति।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित-आकृतिषु x इत्यस्य मानं जानातु।



(a)



(b)

2. एकस्य समबहुभुजस्य प्रत्येकं बाह्यकोणस्य मापं जानन्तु येषां

(1) 9 भुजाः (ii) 15 भुजाः भवेयुः।

3. एकस्य समबहुभुजस्य कति भुजाः भविष्यन्ति यदि एकस्य बाह्यकोणस्य मापनं 24° भवेत्?

4. एकस्य समबहुभुजस्य भुजानां संख्यां जानन्तु यदि अस्य प्रत्येकम् अन्तःकोणः 165° भवेत्?

(a) किम् एतादृशः समबहुभुजः सम्यक् अस्ति यस्य प्रत्येकं बाह्यकोणस्य मापनं 22° भवेत्?

(b) किम् एषः कस्यापि समबहुभुजस्य अन्तःकोणः भवितुम् अर्हति? कथम्?

(a) कस्यापि समबहुभुजे न्यूनातिन्यूनं कति अंशस्य अन्तःकोणः सम्भवः अस्ति? कथम्?

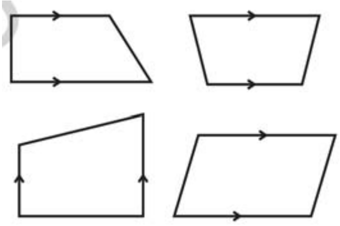
(b) कस्यापि समबहुभुजे अधिकाधिकं कति अंशस्य बाह्यकोणः सम्भवः अस्ति ?

3.4 चतुर्भुजानां प्रकारः

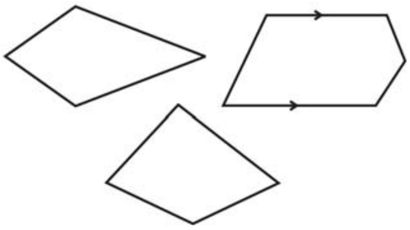
एकस्य चतुर्भुजस्य भुजानां कोणानाञ्च प्रकृत्याधारे एषः विशिष्ट-नाम्ना ज्ञायते।

3.4.1 समलम्बः

समलम्बः एकः एतादृशः चतुर्भुजः भवति यस्मिन् भुजानाम् एकः युग्मः समान्तरः भवति।



एते समलम्बाः सन्ति

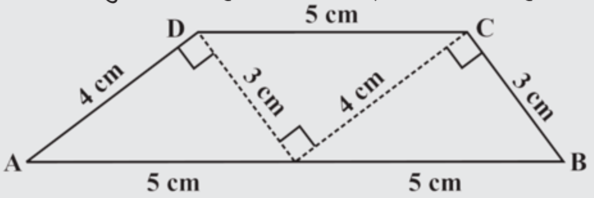


एते समलम्बाः न सन्ति

उपर्युक्त-आकृतीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु अथ स्व मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु यत् कथम् एतेषु केचन समलम्बाः सन्ति अथ केचन समलम्बाः न सन्ति। (**सङ्केतः -** बाणस्य चिह्नं समान्तर-रेखां दर्शयति।)

एतत् कुर्वन्तु

1. समान-सर्वाङ्गसमत्रिभुजानाम् भागं गृह्णन्तु येषां भुजाः 3सेमी, 4सेमी, 5सेमी सन्ति। एतान् व्यवस्थितं करोतु यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति। (आकृतिः 3.11)।



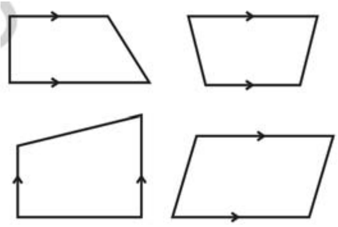
आकृतिः 3.11

भवन्तः एकं समलम्बं प्राप्नुवन्ति। (निरीक्षणं कुर्वन्तु)
अत्र के के भुजाः समानाः सन्ति ? किम् असमानान्तर-भुजाः समान-मापकस्य भवेयुः ?
एतेषां समान-त्रिभुज-समूहानाम् उपयोगं कृत्वा भवन्तः समलम्बद्वयं प्राप्तुं शक्नुवन्ति। तान् अन्वेषयन्तु तथा तेषाम् आकृतीनां चर्चां कुर्वन्तु।

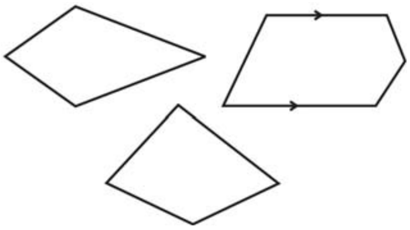
2. स्वस्य तथा स्वस्य मित्राणां ज्यामितीय मञ्जूषातः चत्वारि सेटस्क्वेयर इति गृह्णन्तु। एतत् पृथक्-पृथक् संख्यासु उपयोगं कृत्वा स्व पार्श्वे रक्षन्तु तथा विविधप्रकारकं समलम्बं प्राप्नुवन्तु।
यदि समलम्बस्य असमानन्तरभुजाः समान-दीर्घयुताः स्युः तर्हि वयम् एतत् समद्विबाहु-समलम्बरूपेण कथयामः। किं भवन्तः ऊपरि क्रियमाणे निरीक्षणे कमपि समद्विबाहु-समलम्बं प्राप्तवन्तः ?

3.4.2 पतङ्गः

पतङ्गः विशिष्ट-प्रकारकः एकः चतुर्भुजः अस्ति। प्रत्येक-आकृतौ एकसमानं चिह्नं समानं भुजं प्रदर्शयति।
उदाहरणार्थम् -AB=AD तथा BC=CD



एते पतङ्गाः सन्ति



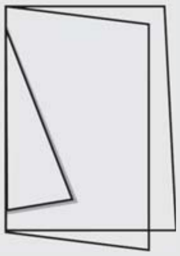
एते पतङ्गाः न सन्ति

एतासाम् आकृतीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु तथा एतत् ज्ञापयितुं प्रयासं कुर्वन्तु यत् पतङ्गः कः अस्ति। निरीक्षणं कुर्वन्तु।

(1) एकस्मिन् पतङ्गे 4 भुजाः भवन्ति (एषः एकः चतुर्भुजः अस्ति)।
(ii) एतस्मिन् **पृथक्-पृथक् आसन्न-भुजानां** युग्मद्वयं भवति यस्य दीर्घता समाना भवति वर्गः पतङ्गः भवति वा इति परिशीलयतु।

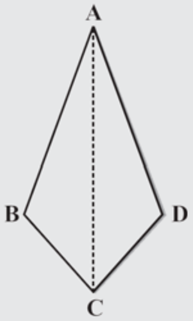
एतत् कुर्वन्तु

एकस्य स्थूलकागदस्य भागं गृह्णन्तु तं द्विगुणं कुर्वन्तु। पृथक्-पृथक् दीर्घतायुतं रेखाखण्डद्वयं लिखन्तु यथा आकृतिः 3.12 इत्यस्मिन् प्रदर्शितम् अस्ति। एतस्य रेखाखण्डस्य अनुदिशं कर्तयित्वा उद्घाटयन्तु। भवन्तः एकस्य पतङ्गस्य आकृतिं प्राप्नुवन्ति (आकृतिः 3.13)।



आकृतिः 3.12

प्रदर्शयन्तुयत् Δ ABC एवं Δ ADC सर्वाङ्गसमः अस्ति। एतेन भवन्तः कं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति।



आकृतिः 3.13

किं पतङ्गे काचित् सममित-रेखा अस्ति ?

पतङ्गम् उभय-विकर्णे वक्रीकुर्वन्तु वर्गमापिकायाः उपयोगेन परीक्षणं कुर्वन्तु यत् किं सः परस्परं समकोणे कर्तयित्वा।

किं विकर्णौ समान-दीर्घतायुतौ अस्ति ?

परीक्षणं कुर्वन्तु (कागदं द्विगुणकरणेन तथा मापनेन) यत् किं विकर्णः परस्परं समद्विभाजितं करोति ?

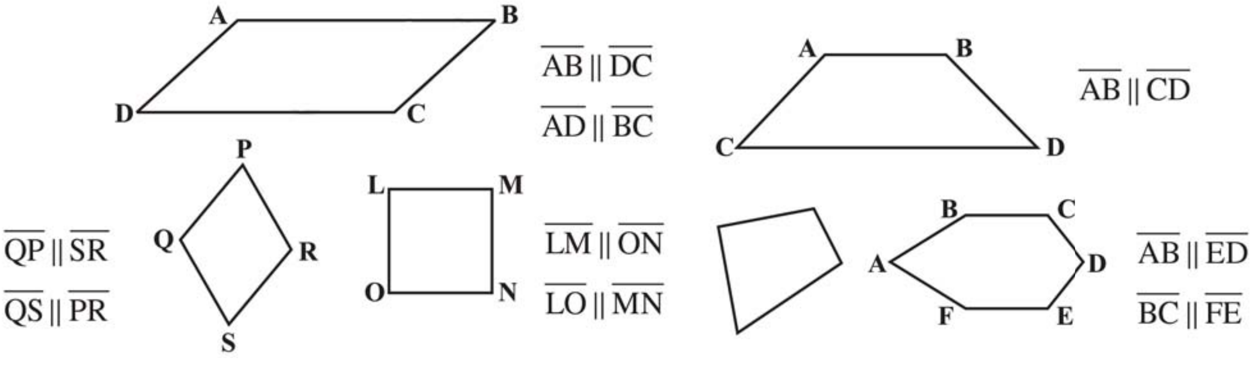
पतङ्गस्य एकं कोणं एकस्य विकर्णस्य विपरीतं द्विगुणिते कृते समानमापीयकोणस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

विकर्णोपरि स्थितस्य तलस्य निरीक्षणं कुर्वन्तु किम् एतत् प्रदर्शयति यत् विकर्णस्य एकः कोणः समद्विभाजयति ?

स्व-ज्ञानविषये सहपाठिभिः सह चर्चां कुर्वन्तु तथा एकां सूचीं निर्मान्तु। एतेषां परिमाणानां सारांशः अध्याये एव कुत्रापि भवतः कृते प्रदत्तः अस्ति।

3.4.3 समान्तर-चतुर्भुजः

समान्तर-चतुर्भुजः एकः चतुर्भुजः एव अस्ति। यथा नाम सङ्केतं करोति अस्य सम्बन्धः समान्तर-रेखाभिः सह अस्ति।



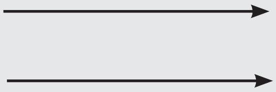
एते समान्तर-चतुर्भुजाः सन्ति **एते समान्तर-चतुर्भुजाः न सन्ति**

एतासाम् आकृतीनाम् अध्ययनं कुर्वन्तु तथा स्वशब्दैः ज्ञापनार्थं प्रयासं कुर्वन्तु यत् समान्तर-चतुर्भुजः किम् अस्ति। स्व-निषकर्षस्य विषये स्वकीय-मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु।

एतत् कुर्वन्तु

भिन्न-भिन्न वैशाल्य-युक्ते स्थूल-कागदस्य द्वे आयताकार-पट्टिके स्वीकुर्वन्तु (आकृतिः 3.14)।

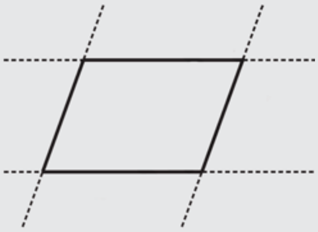
पट्टिका 1 **आकृतिः 3.14** पट्टिका 2



आकृतिः 3.15

एकस्य स्थूल-कागदस्य पट्टिकां समतले स्थापयन्तु तथा अस्याः तटस्य अनुदिशं रेखां कुर्वन्तु यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति (आकृतिः 3.15)। इदानीं द्वितीयां पट्टिकां अङ्कित-रेखायाम् उपरि तिर्यक्दिशि स्थापयन्तु तथा एतस्याः उपयोगं कुर्वन्तः इतोऽपि रेखाद्वयं रचयन्तु यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति (आकृतिः 3.16)।

आकृतिः 3.16



आकृतिः 3.17

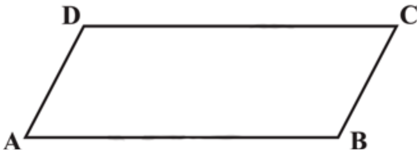
एताभिः चतसृभिः रेखाभिः निर्मिता बन्धाकृतिः चतुर्भुजः अस्ति (आकृतिः 3.17)।

एषा समान्तर-रेखायाः युग्मद्वयस्य मेलनेन निर्मिता। एषः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति।

समान्तर-चतुर्भुजः एकः चतुर्भुजः भवति यस्य सम्मुख-भुजाः समान्तराः भवन्ति।

3.4.4 समान्तर-चतुर्भुजानाम् अवयवाः

एकस्मिन् समान्तर-चतुर्भुजे चत्वारः भुजाः चत्वारः कोणाश्च भवन्ति। एतेषु केचन समान-मापकाः भवन्ति। भवद्भिः एतैः अवयवैः सम्बद्धाः केचन तथ्याः स्मरणीयाः।



आकृतिः 3.18

एकः समान्तर-चतुर्भुजः ABCD प्रदत्तः अस्ति (आकृतिः 3.18)।

$\overline{AB}$ तथा $\overline{DC}$ अस्य सम्मुख-भुजाः सन्ति। $\overline{AD}$ तथा $\overline{BC}$ सम्मुख-भुजानां द्वितीयः युग्मः अस्ति।

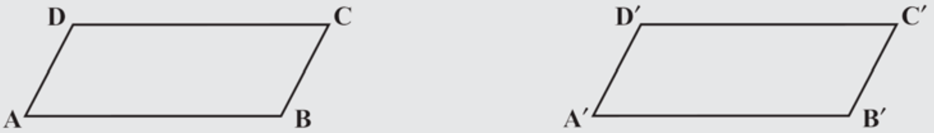
$\angle A$तथा $\angle C$ सम्मुख-कोणानां एकः युग्मः अस्ति एवमेव $\angle B$ तथा $\angle D$ सम्मुख-कोणानां एकः द्वितीयः युग्मः अस्ति।

$\overline{AB}$ तथा $\overline{BC}$ समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-भुजाः सन्ति। यतः एकः भुजः समाप्तः भवति ततः एव द्वितीयः भुजः प्रारम्भः भवति। किं $\overline{BC}$ तथा $\overline{CD}$ अपि आसन्न-भुजाः सन्ति। आसन्न-भुजानां युग्मद्वयम् इतोऽपि अन्वेष्टुं प्रयासं कुर्वन्तु ।

$\angle A$ तथा $\angle B$ समान्तर-चतुर्भुजस्य **आसन्न-कोणाः** सन्ति। उभौ अपि कोणौ उभयनिष्ठ-भुजानां अन्त-बिन्दौ स्थितौ वर्त्तेते। $\angle B$तथा $\angle C$ अपि आसन्न-कोणाः सन्ति। समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-कोणानां द्वितीयं युग्मं जानन्तु।

एतत् कुर्वन्तु

समान-समान्तर-चतुर्भजस्य भागद्वयं ABCD तथा A'B'C'D गृह्णन्तु(आकृतिः 3.19).



आकृतिः 3.19

अत्र $\overline{AB}$ भुजः $\overline{A'B'}$ भुजस्य समानः अस्ति परन्तु अस्य नाम पृथक्-पृथक् अस्ति।
एवमेव अपर-सङ्गत-भुजाः अपि समानाः सन्ति।

$\overline{A'B'}$ इति $\overline{DC}$ इत्यस्य उपरि लिखन्तु, किं तत् परस्परं पूर्णतया आच्छादयति ? इदानीं भवन्तः

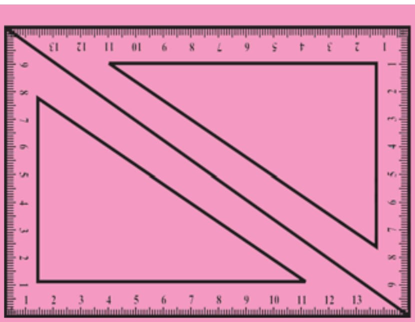
$\overline{A'B'}$ तथा $\overline{DC}$ इत्यस्य औन्नत्य-विषये किं कथयितुं शक्नुवन्ति ?

एवमेव $\overline{AD}$ तथा $\overline{BC}$ इत्यस्य औन्नत्यस्य परीक्षणं कुर्वन्तु। भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति?

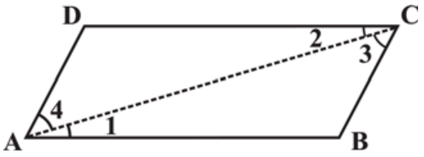
भवन्तः $\overline{AB}$ तथा $\overline{DC}$ इत्यनयोः मापं कृत्वा एतं परिणामं प्राप्तुम् अर्हन्ति ।

गुणः - समान्तर-चतुर्भुजस्य सम्मुख-भुजाः समान-मापकाः भवन्ति ।

30°- 60°- 90° कोणीय समानं वर्गमापिकाद्वयं स्वीकुर्वन्तु। इदानीम् एतत् इत्थं रीत्या परस्परं सम्मेल्य रक्षन्तु यस्मात् एकः समान्तरः चतुर्भुजः भवेत् (आकृतिः 3.20)। किम् एतत् उपर्युकत-गुणस्य पुष्टिं कर्तुं भवतां साहाय्यं करोति ?



आकृतिः 3.20



आकृतिः 3.21

भवन्तः तर्क-वितर्केन एताम् अवधारणां प्रभावयितुं शक्नुवन्ति।

एकस्मिन् ABCD समान्तर-चतुर्भुजे विचारं कुर्वन्तु (आकृतिः 3.21)।

एकं विकर्णं $\overline{AC}$ इति निर्मान्तु। वयं पश्यामः यत् $\angle 1 = \angle 2$ तथा$\angle 3 = \angle 4$ (कथम् ?) यतो हि
त्रिभुजः ABC तथा ADC इत्यस्मिन्$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$तथा
AC उभयनिष्ठः वर्त्तते अत एव ASA सर्वाङ्गसमता निकषेण
Δ ABC ≅ Δ CDA(अत्र ASA निकषस्य प्रयोगः कथम् अभवत् ?)

अतः AB= DC तथाBC= AD.

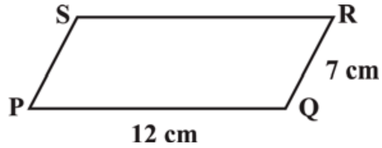
उदाहरणम् 3 - PQRS समान्तर-चतुर्भुजस्य परिमापं जानन्तु (आकृतिः 3.22)।

समाधानम् - समान्तर-चतुर्भुजे सम्मुख-भुजाः समानदीर्घतायुताः भवन्ति।

अतः एव PQ= SR=12सेमी तथा QR= PS=7सेमी

अतः परिमापनं =PQ+QR+SR+SP

=12सेमी +7सेमी +12सेमी +7सेमी = 38सेमी



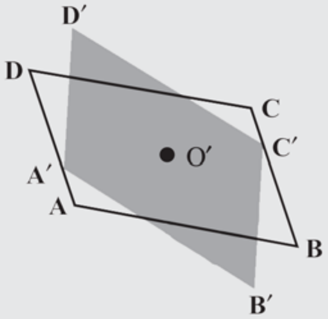
आकृतिः 3.22

3.4.5 समान्तर-चतुर्भुजस्य कोणः

वयं समान्तर-चतुर्भुजस्य सम्मुख-भुजसम्बन्धितस्य एकस्य गुणस्य अध्ययनं कृतवन्तः। वयं कोणानां विषये किं वक्तुं शक्नुमः ?

एतत् कुर्वन्तु

स्वीकुर्वन्तु यत् ABCD एकः समान्तरः चतुर्भुजः अस्ति (आकृतिः 3.23)। अनुकरणपत्रे अस्य प्रतिलिपिं निर्मान्तु। एतां प्रतिलिपिं A'B'C'D इत्यनेन प्रदर्शयन्तु। A'B'C'D इति ABCD इत्यस्मिन् आच्छादयन्तु। उभयमपि चतुर्भुजं परस्परं सम्मेल्य तस्मिन् बिन्दौ पिन इति संस्थापयन्तु यत्र तस्य विकर्णं प्रतिच्छेदयन्ति अनुकरण-पत्रं 180° परिभ्रामयन्तु। समान्तरः चतुर्भुजः इदानीमपि परस्परं पूर्णतया आच्छादयति परन्तु साम्प्रतं भवन्तः पश्यन्ति यत् A' पूर्णरूपेण C बिन्दुम् आच्छादयति तथा अयं विलोमतः अपि सत्यम् अस्ति। एवमेव B' बिन्दुः D बिन्दुं B' बिन्दुः पूर्णतया आच्छादयति तथा अयं विलोमतः अपि सत्यम् अस्ति।



A, C इत्यनयोः कोणयोः विषये किमपि ज्ञायते ? B, D इत्यनयोः मापस्य अपि विषये परीक्षणं कुर्वन्तु।

गुणः - समान्तर-चतुर्भुजस्य सम्मुख-कोणः समानमापकः भवति।

प्रयासं करोतु

30°- 60°- 90° कोणीय समानं वर्गमापिकाद्वयं संगृह्य पूर्ववत्
एकं समान्तरं चतुर्भुजं निर्मापयन्तु। किं प्राप्ताकृतिः उपर्युक्त-गुणस्य पुष्टिकरणे भवतां साहाय्यं करोति।

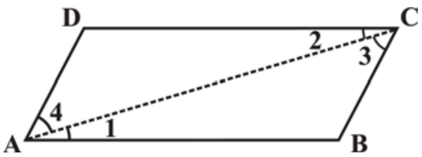
भवन्तः तर्क-वितर्केन एताम् अवधारणां पुष्टीकर्तुं शक्नुवन्ति।

यदि $\overline{AC}$ तथा $\overline{BD}$ समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णः स्याताम् (आकृतिः 3.24) तर्हि भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत्

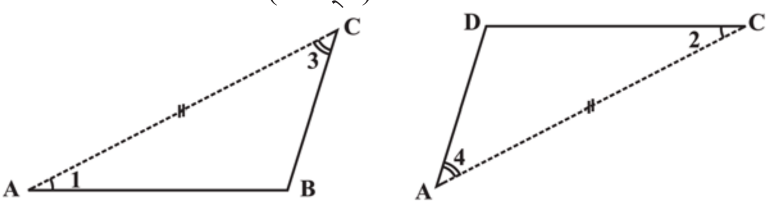
$\angle 1 = \angle 2$ तथा $\angle 3 = \angle 4$ (कथम् ?)

Δ ABC तथा Δ CDA इत्यनयोः पृथक्-पृथक् अध्ययने सति भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् ASA सर्वाङ्गसम निकषस्य प्रयोगेण

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (कथम् ?)



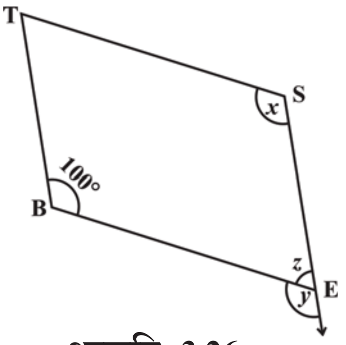
आकृतिः 3.24



आकृतिः 3.25

एतत् प्रदर्शयति यत् $\angle B$ तथा $\angle D$ समान-मापकः अस्ति। इत्थं भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् $m\angle A = m\angle C$

उदाहरणम् 4 - 3.26 आकृत्यां इत्यस्मिन् BEST एकः समान्तरः चतुर्भुजः अस्ति। x, y तथा z इत्येतेषां मानं जानन्तु ।



समाधानम् -S बिन्दुः बिन्दुः B इत्यस्य सम्मुखः अस्ति।

अतः $x=100^{\circ}$(सम्मुखकोणगुणः)

$y=100^{\circ}$($\angle x$ इत्यस्य सङ्गतकोणस्य मापनम्)

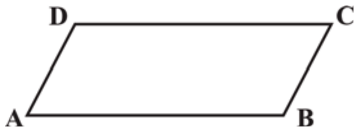
$z=80^{\circ}$ (यतो हि $\angle y$ तथा $\angle z$ रैखिकयुग्मं निर्माति।)

आकृतिः 3.26

अधुना वयं स्वध्यानं एकस्य समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्नकोणे केन्द्रितं कुर्मः।

ABCD इति समान्तर-चतुर्भुजे (आकृतिः 3.27)$\angle A$तथा$\angle D$ सम्पूरक-कोणौ स्तः।

यतोहि $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ तथा DA एका तिर्यक्-रेखा अस्ति। अतः एतत् कोणद्वयम् अन्तः सम्मुख-कोणः अस्ति। $\angle A$तथा$\angle B$ सम्पूरक-कोणौ स्तः।



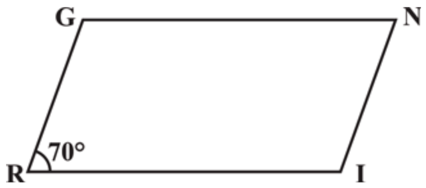
किं भवन्तः ज्ञापितुं शक्नुवन्ति 'कथम्' ?

आकृतिः 3.27

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ तथा $\overline{BA}$ एका तिर्यक्-रेखा अस्तिया $\angle A$तथा$\angle B$ इत्येतौ अन्तः सम्मुख-कोणरूपे परिवर्त्तयति। आकृतितः इतोपि सम्पूरक-कोणद्वयं अभिजानन्तु।

गुणः - समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-कोणाः सम्पूरकाः भवन्ति।

उदाहरणम् 5 - समान्तर-चतुर्भुजे RING इत्यस्मिन् (आकृतिः 3.28) यदि $m\angle R=70^{\circ}$ भवेत् तर्हि अपरान् सर्वान् कोणान् जानन्तु।



समाधानम् -प्रदत्तम् अस्ति -$m\angle R=70^{\circ}$

तदा $m\angle N=70^{\circ}$

यतो हि $\angle R$तथा$\angle I$ सम्पूरक-कोणः स्तः।

आकृतिः 3.28

$m\angle I=180^{\circ}- 70^{\circ}=110^{\circ}$

तथा $m\angle G=110^{\circ}$यतोहि $\angle G,\angle I$इत्यस्य सम्मुख-कोणः वर्तते।

अतः $m\angle R=m\angle N= 70^{\circ}$तथा$m\angle I=m\angle G=110^{\circ}$

विचारयन्तु चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

$m\angle R=m\angle N= 70^{\circ}$ इति प्रदर्शनानन्तरं किं भवन्तः केनचित् अन्येन विधिना $m\angle I$ तथा $m\angle G$ इति ज्ञातुम् अर्हन्ति ?

3.4.6 समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णः

सामान्यतया समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णाः समान-मापकाः न भवन्ति।

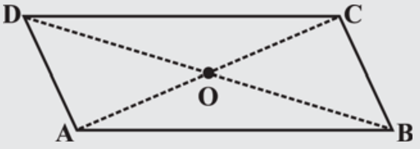
(किं भवन्तः स्वकीये पूर्वक्रियाकलापे अस्य परीक्षणं कृतवन्तः ?)

यद्यपि समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णेषु एकः रोचकः गुणः भवति।

एतत् कुर्वन्तु

ABCD इति समान्तर-चतुर्भुजं स्वीकुर्वन्तु। अस्य एकं कर्तितम् भागं गृह्णन्तु (आकृतिः 3.29)।

स्वीकुर्वन्तु यत् अस्य विकर्णः $\overline{AC}$ तथा $\overline{DB}$ परस्परं 'O' इति बिन्दौ प्रतिच्छेदयतः।



आकृतिः 3.29

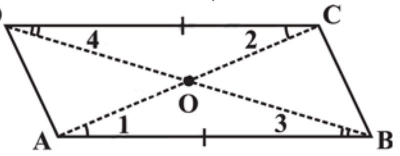
C इति A उपरि संस्थाप्य एकेन तलेन $\overline{AC}$ इत्यस्य मध्य-बिन्दुं जानन्तु। किं मध्य-बिन्दुः O अस्ति ? किम् एतत् प्रदर्शयति यत्विकर्णः $\overline{DB}$ विकर्णः $\overline{AC}$ च 'O' इति बिन्दौ समद्विभाजितं करोति ? स्वकीय मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु। एतं क्रियाकलापं $\overline{DB}$ इत्यस्य मध्य बिन्दुः कुत्र स्थितः भविष्यति इति ज्ञातुं पुनः कुर्वन्तु।

गुणः - समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णौ परस्परं समद्विभाजितं कुरुतः। (अवश्यमेव तस्य प्रतिच्छेदबिन्दौ।)

अस्य गुणस्य तर्क-वितर्कं पुष्टिञ्च कर्तुं कठिनं नास्ति। आकृतिः 3.30 इत्यस्मात् ASA सर्वाङ्समता-प्रतिबन्धेन अत्यन्त-सरलरीत्या द्रष्टुं शक्यते यत्

Δ AOB = Δ COD (अत्र ASA प्रतिबन्धस्य प्रयोगः कथम् अभवत् ?)

अतः AO = CO तथा BO = DO



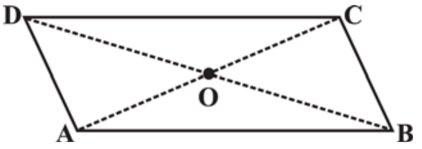
आकृतिः 3.30

उदाहरणम् 6 -

आकृतिः 3.31 इत्यस्मिन् HELP एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति। प्रदत्तम् अस्ति (औन्नत्यं सेमी इत्यस्मिन् वर्तते।) OE = 4 तथा HL, PE इत्यस्मात् 5 अधिकः वर्तते। OH जानन्तु।

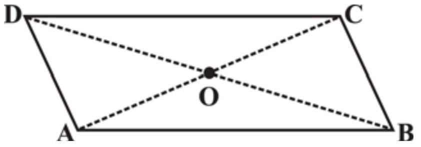
समाधानम् -

यदि -	OE = 4 तदा OP = 4	(कथम् ?)
अतः	PE = 8,	(कथम् ?)
अतएव	HL = 8+5 = 13	
अतः	OH = $\frac{1}{2}$ ×13 6.5 सेमी	



आकृतिः 3.31

प्रश्नावली 3.3

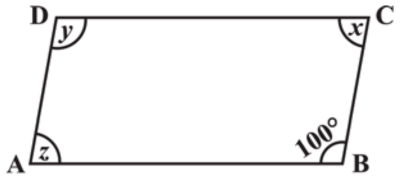


1. ABCD एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति। प्रत्येकं कथनं पूर्वपरिभाषया अथवा पूर्वकृतप्रयोगगुणेन पूरयन्तु।

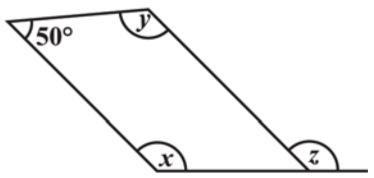
(i) AD =........ (ii) ∠DCB =.........

(iii) OC =........ (iv) m∠DAB+m∠CDA=.........

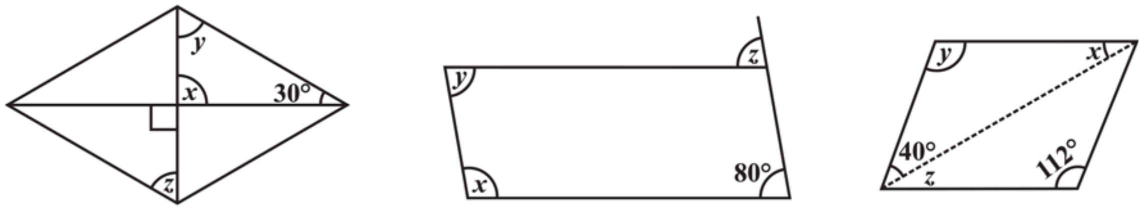
2. निम्न-समान्तर-चतुर्भुजेषु x,y,z इत्येतेषां मानं जानन्तु।



(i)



(ii)



(iii) (iv) (v)

3. किम् एकः चतुर्भुजः ABCD समान्तर-चतुर्भुजः भवितुम् अर्हति यदि

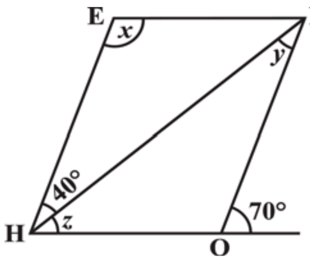
(i) $\angle D + \angle B = 180^\circ$?

(ii) AB=DC=8सेमी,AD=4सेमी तथा BC=4.4 सेमी ?

(iii) $\angle A = 70^\circ$ तथा $\angle C = 65^\circ$?

4. एकस्य चतुर्भुजस्य सामान्य-आकृतिं रचयन्तु या समान्तर-चतुर्भुजान्तर्गते न आगच्छेत् यस्याः सम्मुख-कोणयोः मापनं समानं स्यात्।

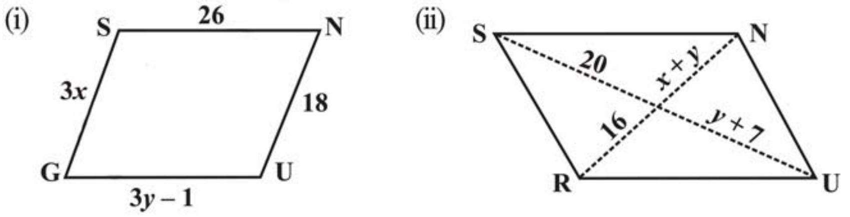
कस्यापि समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-द्वयस्य कोणस्य अनुपातः 3 : 2 अस्ति। समान्तर-चतुर्भुजस्य प्रत्येकंकोणस्य मापनं जानन्तु।



6. कस्यापि समान्तर-चतुर्भुजस्य आसन्न-कोणद्वयस्य मापनं समानम् अस्ति। समान्तर-चतुर्भुजस्य प्रत्येकंकोणस्य मापनं जानन्तु।

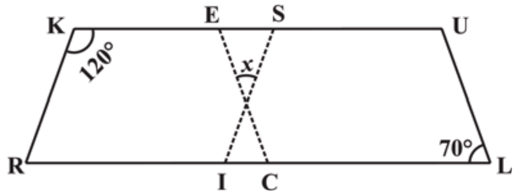
7. संलग्ना-आकृतिः HOPE एकः समान्तर-चतुर्भुजौ स्तः। x, y तथा z कोणानां मापनं जानन्तु। कृतप्रयोगगुणं ज्ञापयन्तु।

8. निम्न-आकृतयः GUNS तथा RUNS समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति। x तथा y जानन्तु। (औन्नत्यं सेमी इत्यस्मिन् वर्त्तते)।



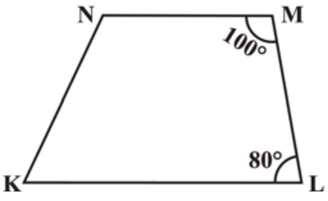
9. आकृतौ RISK तथा CLUE

उभौ समान्तर-चतुर्भुजौ स्तः x इत्यस्य मानं जानन्तु।

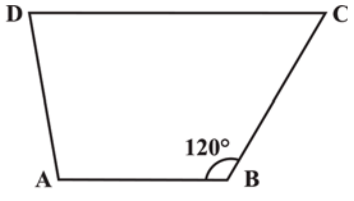


10. ज्ञापयन्तु एषा आकृतिः एका समलम्बः अस्ति इति। अस्याः कौ द्वौ भुजौ समान्तरौ स्तः ? (आकृतिः 3.32)

11. 3.33 आकृत्याम् इत्यस्यां $m\angle C$ जानन्तु यदि $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ अस्ति।



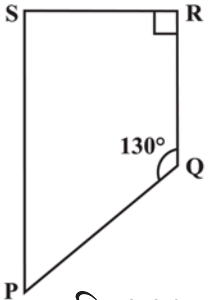
आकृतिः 3.2



आकृतिः 3.33

12. 3.34 आकृत्यां $\angle P$ तथा $\angle S$ इत्यस्य मापं जानन्तु यदि $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ अस्ति।

(यदि भवन्तः $m\angle R$ जानन्ति तर्हि किं $m\angle P$ ज्ञातुं कश्चित् अन्यः विधिः अस्ति ?)



आकृतिः 3.34

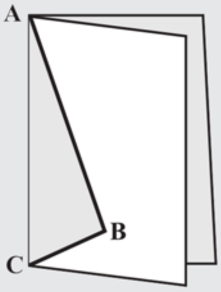
3.5 केचनविशिष्ट-समान्तर-चतुर्भुजः

3.5.1 सम-चतुर्भुजः

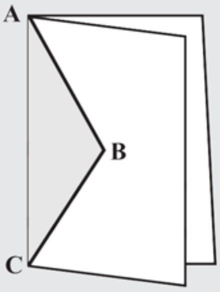
पतङ्गः (यः एकः समान्तर-चतुर्भुजः नास्ति) विशेष-स्थितिरूपे वयम् एकं सम-चतुर्भुजं प्राप्नुमः यः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अपि अस्ति।

एतत् कुर्वन्तु

भवन्तः पूर्वं कागदं कर्तयित्वा पतङ्गं निर्मितवन्तः तं पतङ्गं स्मरन्तु।



कर्तितः पतङ्गः



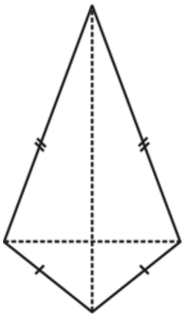
समचतुर्भुजः कर्तितः पतङ्गः

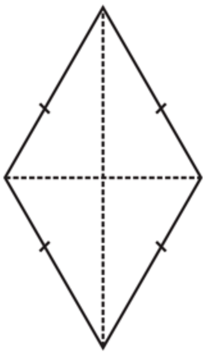
यदा भवन्तः ABC इत्यस्य अनुदिशं कर्त्तयित्वा कागदम् उद्घाटयन्ति तदा भवन्तः एकं पतङ्गं प्राप्नुवन्ति। अत्र औन्नत्यं AB तथा BC पृथक्-पृथक् आस्ताम्। यदि भवन्तः AB = BC इति आलिखन्ति। तर्हि प्राप्तः पतङ्गः एकः समचतुर्भुजः इति उच्यते।

ध्यानं ददतु यत् समचतुर्भुजस्य सर्वे भुजाः समदीर्घयुताः भवन्ति परन्तु पतङ्गस्थितौ एवं नास्ति। समचतुर्भुजः एकः ईदृशः चतुर्भुजः अस्ति यस्य सर्वे भुजाः समलम्बकाः भवन्ति।

यतः समचतुर्भुजस्य सम्मुख-भुजाः समानाः भवन्ति अत एव एषः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अपि अस्ति। अतः एकस्मिन् समचतुर्भुजे एकस्य समान्तर-चतुर्भुजस्य तथा पतङ्गस्य सर्वे गुणाः विद्यमानाः भवन्ति। तेषां सूचीनिर्माणस्य प्रयासं कुर्वन्तु। तदा भवन्तः स्वसूची पुस्तके दत्तपरीक्षणसूच्या सह सम्मेल्य पुष्टिं कर्तुं शक्नुवन्ति। एकस्य समचतुर्भुजस्य सर्वोत्तमः गुणः तस्य विकर्णानां विषये भवति।

गुणः - एकस्य समचतुर्भुजस्य विकर्णः परस्परं लम्ब-समद्विभाजकः भवति।

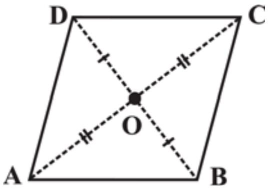

पतङ्गः


समचतुर्भुजः

एतत् कुर्वन्तु

समचतुर्भुजस्य एकां प्रतिलिपिं स्वीकुर्वन्तु। कागदं परावृत्य परीक्षयन्तु यत् किं प्रतिच्छेदी बिन्दुः प्रत्येकविकर्णस्य मध्यबिन्दुः अस्ति। भवन्तः एकस्य वर्गमापिकायां कोणस्य प्रयोगं कृत्वा परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् ते परस्परं समकोणे प्रतिच्छेदयन्ति वा इति।

तर्कपूर्णचरणानाम् उपयोगं कृत्वा अत्र एकः परिलेखः प्रदत्ता अस्ति या अस्य गुणस्य पुष्टिं करोति। ABCD एकः समचतुर्भुजः अस्ति (आकृतिः 3.35)। अतः एषः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अपि अस्ति। यतो हि विकर्णः परस्परं समद्विभजति।



आकृतिः 3.35

अतः AO = OC तथा OB = OD

वयम् एतत् प्रदर्शितुम् इच्छामः यत् $m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$ अस्ति।

[यतो हि AO = OC (कथम् ?)

AD = CD (कथम् ?)

OD = OD

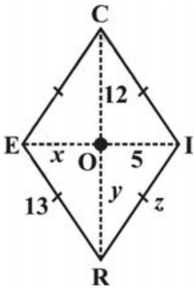
SAS सर्वाङ्गसमता प्रतिबन्धेन एतत् द्रष्टुं शक्यते यत्

Δ AOD ≅ Δ mAOD = mCOD (यतः AOD, COD रैखिक-युग्मः अस्ति)

अतः $m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$

उदाहरणम् 7

RICE एकः सम-चतुर्भुजः अस्ति (आकृतिः 3.36)। x,y तथाz इत्यस्य मानं जानन्तु तथा स्व उत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।



आकृतिः 3.36

समाधानम् -

x=OE y = OI(विकर्णं समद्विभजति।) = 5

y=OR = OC(विकर्णं समद्विभजति।) = 12

z = समचतुर्भुजस्य भुजाः =13(समचतुर्भुजस्य सर्वे भुजाः समान मापकाः भवन्ति।)

3.5.2 एकः आयतः

आयतः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति यस्य सर्वे कोणाः समान-मापकाः भवन्ति (आकृतिः 3.37)।

अस्याः परिभाषायाः पूर्णः अर्थः कः ? एतस्य विषये स्वमित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु यदि आयतः समकोणिकः स्यात् तर्हि प्रत्येककोणस्य मापनं किं भविष्यति।

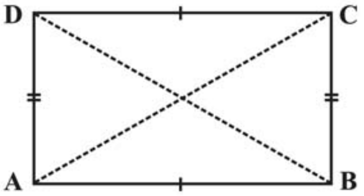
स्वीकुर्वन्तु यत् कोणस्य मापनं x° अस्ति।

तदा $4x^\circ = 360^\circ$ (कथम् ?)

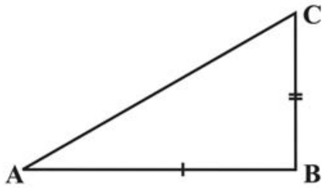
अतएव $x^\circ = 90^\circ$

अतः आयतस्य प्रत्येककोणः समानकोणः भवति। अतः एकः आयतः समान्तर-चतुर्भुजः भवति यस्मिन् प्रत्येक-कोणः समकोणः भवति । एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति इति कारणेन आयतस्य सम्मुख-भुजाः समान-मापकाः भवन्ति तथा विकर्णौ परस्परं समद्विभाजितः भवति। समान्तर-चतुर्भुजे विकर्णः भिन्नं भिन्नं दीर्घतायुतः भवति। (परीक्षणं कुर्वन्तु) परन्तु आयतस्य (विशेषस्थितौ) विकर्णौ समानदीर्घतायुतौ भवतः।

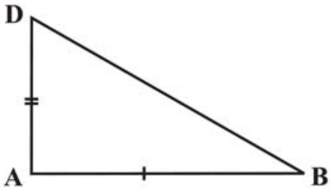
गुणः-आयतस्य विकर्णः समलम्बकः भवति।



आकृतिः 3.38



आकृतिः 3.39



आकृतिः 3.40

अस्य पुष्टिः सरलतया भवितुम् अर्हति। यदि ABCD एकः आयतः (आकृतिः 3.38) वर्तते तर्हि त्रिभुजः ABC तथाABD इति पृथक्-पृथक् (आकृतिः 3.39 तथा आकृतिः 3.40) दृष्ट्वा अधो-लिखित-अंशान् प्राप्नुमः।

Δ AOD ≅ Δ COD

यतो हि	AB = AB	(उभयनिष्ठम्)
	BC = AD	(कथम् ?)
	$m\angle A = m\angle B = 90^{\circ}$	(कथम् ?)

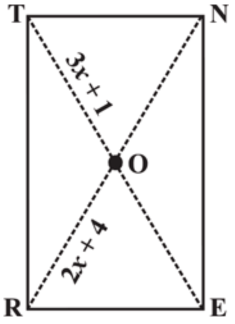
SAS प्रतिबन्धेनसर्वाङ्गसमता भवति।

अतः AC = BD

तथा एकस्मिन् आयते विकर्णौ समान-दीर्घतायुतौ भवतः तथापि परस्परं समद्विभजतः। (कथम् ?)

उदाहरणम् 8-

RENT एकः आयतः अस्ति (आकृतिः 3.41)। अस्य विकर्णौ परस्परं 'O' इत्यस्मिन् प्रतिच्छेदयतः x इत्यस्य मानं जानन्तु यदि OR = 2x+4 तथा OT = 3x+1 अस्ति।



समाधानम् -

$\overline{OT}$ विकर्णः $\overline{TE}$ इत्यस्य अर्धः अस्ति। $\overline{OR}$ विकर्णः $\overline{RN}$ इत्यस्य अर्धः अस्ति। अत्र विकर्णौ समानमापकौ स्तः। (कथम् ?)

अतः तेषाम् अर्धभागः अपि परस्परं समानः एव अस्ति।

अतः एव 3x+1=2x+4 अर्थात् x=3

आकृतिः 3.41

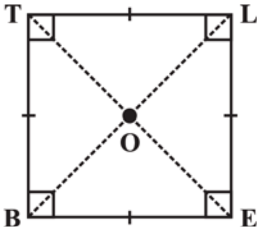
3.5.3 वर्गः

वर्गः एकः आयतः भवति यस्य भुजाः समानाः भवन्ति।अस्यार्थः अयमेव यत् एकस्मिन् वर्गे एकस्य आयतस्य सर्वैः गुणैः सह एकः अतिरिक्तोऽपि गुणः भवति यत् अस्य भुजाः समानाः भवन्ति। वर्गस्य विकर्णः आयतस्य विकर्णः इव समानदीर्घतायुतः भवति। एकस्मिन् आयते विकर्णौ परस्परं लम्बौ भवेताम् इति अपेक्षा नास्ति। (परीक्षयन्तु) कस्मिन्नपि वर्गे विकर्णः।

(i) परस्परं समद्विभजति। (वर्गः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति)।

(ii) समान-दीर्घतायुतौ भवतः। (वर्गः एकः आयतः अस्ति।) तथा

(iii) परस्परं लम्बौ भवतः।



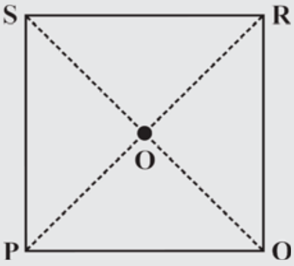
BELT एकः वर्गः अस्ति यस्मिन्
BE = EL = LT = TB
$\angle B, \angle E, \angle L, \angle T$ तथा समकोणाः सन्ति। BL = ET तथा BL ET
OB = OL तथा OE = OT

इत्थं वयं निम्नलिखितं गुणधर्मं प्राप्नुमः।

गुणः:-वर्गस्य विकर्णौ परस्परं समकोणे समद्विभजतः।

एतत् कुर्वन्तु

एकं वर्गाकारं आस्तरणं PQRS इति स्वीकुर्वन्तु। (आकृतिः 3.42)।
द्वयोः विकर्णयोः अनुदिशं तलं स्थापयन्तु। किं तयोः मध्यबिन्दुः समानः एव अस्ति।
वर्गमापिकायाः उपयोगं कृत्वा परीक्षणं कुर्वन्तु किं 'O' इत्यस्मिन् निर्मितः कोणः 90° इत्यस्य अस्ति। एतत् उपर्युक्त-गुणधर्मं साधयति।



आकृतिः 3.42

तर्क-वितर्कसहायतया वयम् अस्य पुष्टिं कर्तुं शक्नुमः। ABCD एकः वर्गः अस्तियस्य विकर्णः परस्परं प्रतिच्छेदयतः। (आकृतिः 3.43)।

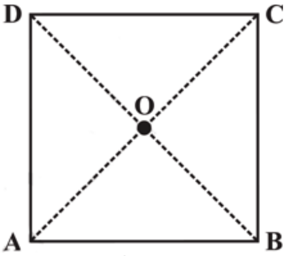
OA = OC (यतो हि वर्गः एकः समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति)

SSS सर्वाङ्गसमता प्रतिबन्धेन

Δ AOD $\cong$ Δ COD (कथम् ?)

अतः m∠AOD= m∠COD

एते कोणाः रैखिक-युग्मं निर्मान्ति अतः प्रत्येक-कोणः समकोणः अस्ति।



आकृतिः 3.43

प्रश्नावली 3.3

1. वदन्तु कथनं सत्यम् अस्ति अथवा असत्यम् -

(a) सर्वे आयताः वर्गाः भवन्ति।

(b) सर्वे सम-चतुर्भुजाः समान्तर-चतुर्भुजाः भवन्ति।

(c) सर्वे वर्गाः सम-चतुर्भुजाः आयताः अपि भवन्ति।

(d) सर्वे वर्गाः समान्तर-चतुर्भुजाः न भवन्ति।

(e) सर्वे पतङ्गाः सम-चतुर्भुजाः भवन्ति।

(g) सर्वे समान्तर-चतुर्भुजाः समलम्ब-चतुर्भुजाः भवन्ति।

(f) सर्वे सम-चतुर्भुजाः पतङ्गाः भवन्ति।

(h) सर्वे वर्गाः समलम्ब-चतुर्भुजाः भवन्ति।

2. तान् सर्वान् चतुर्भुजान् परिचिन्वन्तु येषु -

(a) चत्वारः भुजाः समानदीर्घतायुताः भवन्तु। (b) चत्वारः समकोणाः सन्ति।

3. ज्ञापयन्तु कथम् एकः वर्गः -

(i) एकः चतुर्भुजः (ii) एकः समान्तरः चतुर्भुजः (iii) एकः समः चतुर्भुजः

(iv) एकः आयतः अस्ति।

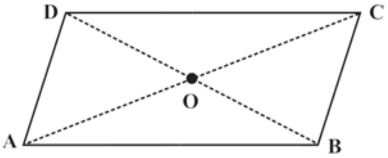
4. एकस्य चतुर्भुजस्य नाम ज्ञापयन्तु यस्य विकर्णः -

(i) परस्परं समद्विभजति (ii) परस्परं लम्बं समद्विभजति (iii) समानाः स्युः

5. ज्ञापयन्तु एकः आयतः उत्तलचतुर्भुजः कथम् अस्ति।

6. ABC एकः समकोणः त्रिभुजः अस्ति तथा 'O' इति समकोणस्य सम्मुख-भुजस्य मध्य-बिन्दुः अस्ति। ज्ञापयन्तु कथं 'O' बिन्दुः A, B तथा C इत्यस्मात् समान दूरे स्थितः वर्त्तते।

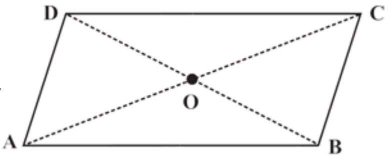
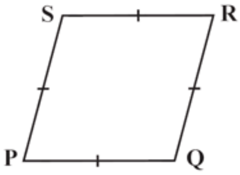
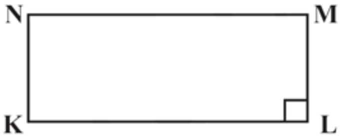
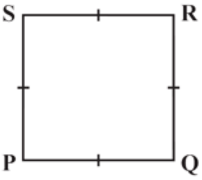
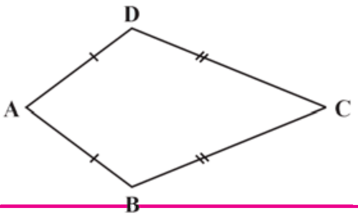
(बिन्दु-चिह्निताङ्कित-भुजाःभवतां सहायतायै सन्ति।)



विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु तथा लिखन्तु

1. एकः राजशिल्पकारः प्रस्तर-पट्टिकां निर्माति। सः एतम् आयताकारं निर्मातुम् इच्छति। कति विध-पृथक् रीत्या सः एतं विश्वसिति यत् एषः आयताकारः अस्ति।
2. वर्गम् आयतरूपे परिभाषितवान् यस्य सर्वे भुजाः समानाः सन्ति। किं वयम् एतं समचतुर्भुजरूपे परिभाषितुं शक्नुमः यस्य कोणाः समान-मापकाः स्युः ? एतं विचारं स्पष्टयन्तु।
3. किम् एकस्य समलम्बस्य सर्वे कोणाः समानमापकाः भवितुम् अर्हन्ति ? किम् एतस्य सर्वे भुजाः समानमापकाः भवितुम् अर्हन्ति ? वर्णनं कुर्वन्तु।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु तथा लिखन्तु

चतुर्भुजः	गुणः
समान्तर-चतुर्भुजः एकः चतुर्भुजः यस्मिन् सम्मुख-भुजानां प्रत्येक-युग्मः समान्तरः भवति। 	1. सम्मुख-भुजाः समानाः भवन्ति। 2. सम्मुख-कोणाः समानाः भवन्ति। 3. विकर्णौ परस्परं समद्विभजतः।
समचतुर्भुजः एकः चतुर्भुजः यस्य सर्वे भुजाः समानमापकाः भवन्ति। 	1. समान्तर-चतुर्भुजस्य सर्वे गुणाः भवन्ति। 2. विकर्णौ परस्परं लम्बौ भवतः।
आयतः एकः समान्तर-चतुर्भुजः यस्मिन् एकः कोणः समकोणः भवति। 	1. समान्तर-चतुर्भुजस्य सर्वे गुणाःभवन्ति। 2. प्रत्येककोणः समकोणः भवति। 3. विकर्णौ समान-मापकौ भवन्ति ।
वर्गः एकः आयतः यस्य सर्वे भुजाः समानाः भवन्ति। 	समान्तरः चतुर्भुजः, समचतुर्भुजः तथा आयतः इत्येतेषां सर्वे गुणाः समानाः भवन्ति।
पतङ्गः एकः चतुर्भुजः यस्मिन् द्वयोः आसन्न-भुजयोः युग्मः समानः भवति। 	1. विकर्णौ परस्परं लम्बौ भवन्ति। 2. एकः विकर्णः अपरं विकर्णं समद्विभजति। 3. आकृतौ $m\angle B = m\angle D$ परन्तु $m\angle A \neq m\angle C$

नोट